Toppersnotes

Unleash the topper in you

# DRDO-MTS

## डिफेंस रिसर्च एण्ड डेवलपमेंट ऑर्गनाइज़ेशन

# गणित

SIERRA
INNOVATIONS

# CONTENT

# ljyhdj.k

सरलीकरण से आशय किसी जटिल संक्रिया वाले गणितीय व्यंजक को सरल मान मे बदलने से है। यहाँ जटिल संक्रिया का अर्थ है किसी व्यंजक मे जोड़-घटाव-गुणा-भाग प्रतिशतता एवं कोष्टक, आदि का एक साथ आना है। इस प्रकार की गणीतीय संक्रिया मे एक नियम-विशेष का चरणबद्ध तरीके से पालन करना होता है, जिसे VBODMAS के नाम से जाना जाता है। इसके अलावा सरलीकरण मे बीजगणितीय सूत्रों का भी उपयोग किया जाता है।

नियम :-)

VBODMAS, विभिन्न संक्रियाओ (जैसे - कोष्टक, गुणा, भाग, जोड़, घटाव) आदि के अंग्रेजी शब्दो (नामो) के आरम्भिक अक्षरो का समूह है। जो इस प्रकार है -

V - Viniculum - रेखा कोष्टक

B - Bracket - [{( )}] छोटा, मंझला, बड़ा कोष्टक

O - Of - x का

D - Divide - (÷) भाग

M - Multiplication - (x) गुणा

A - Addition - (+) जोड़

S - Subtraction - (−) घटाव

इस नियम के अन्तर्गत यदि किसी गणितीय व्यंजक मे ये सब चिह्न मौजूद है तो चरणबद्ध तरीके से यह संक्रिया करें।

चरण 1 :- पहले सभी कोष्टको ( यथा - रेखा , छोटा , मंझला , बड़ा ) आदि की संक्रिया पुरी की जाती है।

चरण 2 :- 'का' को हटाकर x करें।

चरण 3 :- भाग क्रिया करें।

चरण 4 :- गुणा करें।

चरण 5 :- योगफल प्राप्त करें अर्थात जोड़ें।

चरण 6 :- घटाएँ।

कोष्टक की संक्रिया का उदाहरण :-)

उदाहरण 1 :- ). $6 - [5 - \{6 - (5 - \overline{4 - 1})\}]$ का मान है।

a) 4 b) 5
c) 6 d) 7

हल :-) (b) $= 6 - [5 - \{6 - (5 - 3)\}]$ [रेखा कोष्टक हटाने पर]

$= 6 - [5 - \{6 - 2\}]$ [छोटा कोष्टक हटाने पर]

$= 6 - [5 - 4]$ [मंझला कोष्टक हटाने पर]

$= 6 - 1$ [बड़ा कोष्टक हटाने पर]

$= 5$

जोड़-घटा व गुणा-भाग की संक्रिया का उदाहरण :-)

उदाहरण 2 :- $18 \times 12 + 16 \div 8 - 14 = ?$

a) 100 b) 105 c) 204 d) 205

हल :-) (c)

$= 18 \times 12 + 2 - 14$ (भाग)

$= 216 + 2 - 14$ (गुणा)

$= 218 - 14$ (जोड़)

$= 204$ (घटाव)

मिश्रित संक्रियाओं के उदाहरण :-)

उदाहरण 3 :-) $\left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{60 \div \left(15 \times \overline{13 + 12 \div 4 - 12}\right)\right\} + 24 \times 2\right]$ का मान है -

a) 125 b) 126

c) 127 d) इनमें से कोई नहीं

हल :-) (c) VBODMAS के अनुसार सर्वप्रथम रेखा कोष्ठक के अन्दर की संक्रिया नियम के अनुसार ही करेंगे।

रेखा कोष्ठक के अन्दर की संक्रियाए

$= \left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{60 \div \left(15 \times \overline{13 + \frac{12}{4} - 12}\right)\right\} + 24 \times 2\right]$

$= \left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{60 \div \left(15 \times \overline{13 + 3 - 12}\right)\right\} + 24 \times 2\right]$

$= \left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{60 \div \left(15 \times \overline{16 - 12}\right)\right\} + 24 \times 2\right]$

छोटे कोष्ठक के अन्दर संक्रियाँ

$\left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{60 \div (15 \times 4)\right\} + 24 \times 2\right]$

मंझले कोष्टक के अन्दर संक्रियाँ =

$$= \left[240 \text{ का } \frac{1}{3} - \left\{\frac{60}{60}\right\} + 24\times 2\right]$$

बड़े कोष्टक मे 'का' की संक्रिया :-)

$$= \left[240\times\frac{1}{3} - 1 + 24\times 2\right]$$

$$= 80 - 1 + 24\times 2$$

गुणा की संक्रियाँ :- $= 80 - 1 + 48$

जोड़ की संक्रियाँ :- $= 128 - 1$

घटाव की संक्रियाँ :- $= 127$

बीजगणितीय सूत्रो का प्रयोग :-)

गणितीय व्यंजक को सरल करने के लिए बीजगणितीय सूत्रों या सर्वसमिकाओं का प्रयोग अति महत्वपूर्ण होता है। इन सूत्रों का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब व्यंजक का स्वरूप सर्वसमिकाओं जैसा हो।

जैसे - $2.5\times 2.5 - 0.7\times 0.7$ (माना $2.5 = a$ तथा $0.7 = b$)

$\Rightarrow \quad a\times a - b\times b = a^2 - b^2$ यह एक सर्वसमिका है।

$\Rightarrow \quad (a+b)(a-b)$ यह सर्वसमिका का गुणनखण्ड रूप है।

अतः

अभीष्ट मान = $(2.5+0.7)(2.5-0.7) = 3.2\times 1.8 = 5.76$.

महत्वपूर्ण सर्वसमिकाए :-)

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

4. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

5. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$

6. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

7. $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

8. $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

9. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

10. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

11. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

12. $a^3+b^3+c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$$

13. यदि $a+b+c=0$ हो तो $a^3+b^3+c^3 = 3abc$

उदाहरण 4 :- $\dfrac{0.0256 - 0.0169}{0.16 - 0.13}$ का मान क्या होगा ?

a) 0.03 b) 0.05

c) 0.10 d) 0.08

हल :- (a) यहाँ $0.0256 = (0.16)^2 \Rightarrow 0.0169 = (0.13)^2$

$$\therefore \frac{(0.16)^2 - (0.13)^2}{0.16 - 0.13} = \frac{(0.16+0.13)(0.16-0.13)}{(0.16-0.13)}$$

$\because \quad [a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$

$= 0.16 - 0.13 = 0.03$

उदाहरण 5 :-

$$\frac{0.67 \times 0.67 \times 0.67 - 0.36 \times 0.36 \times 0.36}{(0.67 \times 0.67) + (0.67 \times 0.36) + (0.36 \times 0.36)}$$

a) 0.31 b) 3.1
c) 4.1 d) 0.44

हल :- (a) माना $0.67 = a$ , $0.36 = b$

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a^2 + ab + b^2)}$$

$$= a - b = 0.67 - 0.36 = 0.31$$

## (-: अभ्यास प्रश्न :-)

**Q1.** $270 \div 40$ का $\frac{1}{2} + 10 \times 7 = ?$

a) 65.5 b) 75 c) 80.5 d) 83.5.

हल :-) (d) = $270 \div 40$ का $\frac{1}{2} + 10 \times 7$

( पहले 'का' की गुणा, फिर भाग करेंगे )

$= 270 \div 40 \times \frac{1}{2} + 10 \times 7$

$= 270 \div 20 + 10 \times 7$

$= \frac{270}{20} + 10 \times 7 = 13.5 + 70 = 83.5.$

**Q2.** $\{14.5 - [4.5 + \{4.5 - (9.0 - \overline{4.5 + ?})\}] = 0$ मे (?) का मान बताइये ?

a) 9 b) 15 c) 10 d) 20

हल :-) (c)

$14.5 - [4.5 + \{4.5 - (9.0 - \overline{4.5 + ?})\}] = 0$

$14.5 - [4.5 + \{4.5 - (9.0 - 4.5 - ?)\}] = 0$

$14.5 - [4.5 + \{4.5 - (4.5 - ?)\}] = 0$

$14.5 - [4.5 + \{4.5 - 4.5 + ?\}] = 0$

$14.5 - [4.5 + ?] = 0$

$14.5 - 4.5 + ? = 0$

$10.0 - ? = 0$

$? = 10$

**Q3.** $(\overline{300 - 175} + 25) + 30 \div 10 \times 4 = ?$

a) 110 b) 120 c) 162 d) 135

हल :-) (c)

$= (\overline{300 - 175} + 25) + 30 \div 10 \times 4$

$= (125 + 25) + 30 \div 10 \times 4$

$= 150 + 30 \div 10 \times 4$ (छोटा कोष्ठक)

$= 150 + \frac{30}{10} \times 4$ (भाग किया)

$= 150 + 3 \times 4$ (गुणा)

$= 150 + 12$ (जोड़)

$= 162$

Q4. $150 \div 6 \times \left[\frac{1}{2} \text{ का } \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \text{ का } \frac{7}{4}\right]$ का मान है -

a) 31 b) 31.25 c) 37.25 d) 35.25

हल :-) (b)

$= 150 \div 6 \times \left(\frac{1}{2} \text{ का } \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \text{ का } \frac{7}{4}\right)$

$= 150 \div 6 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{7}{4}\right)$

$= 150 \div 6 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{12}\right)$

$= \frac{150}{6} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{12}\right)$

$= 25 \times \frac{(8+7)}{12}$

$= \frac{25 \times 15}{12} = \frac{25 \times 5}{4}$

$= \frac{125}{4}$

$= 31.25$

Q5. $0.2 \times 0.003 \times 0.004 \times 0.005 = ?$

a) 0.00012 b) 0.0000012

c) 0.0012 d) 0.0000000120

हल :-) (d)

$0.2 \times 0.0003 \times 0.004 \times 0.005$

$= 0.0000000120$

Q6. $\dfrac{0.15 \times 0.15 - 0.05 \times 0.005}{0.15 + 0.05}$ का मान है।

a) 0.10 b) 0.05 c) 0.15 d) 0.20

हल :-) (a)

$\dfrac{0.15 \times 0.15 - 0.05 \times 0.05}{0.15 + 0.05}$

माना $0.15 = a$ तथा $0.05 = b$

$= \dfrac{a^2 - b^2}{a+b} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{(a+b)} = (a-b)$ (सूत्र से)

$\therefore$ अभीष्ट मान $= 0.15 - 0.05$ (मान रखने पर)

$= 0.10$

Q7. $\dfrac{110 \times 110 - 53 \times 53}{57 \times 163}$ का सरल मान क्या है -

a) 1 b) 55 c) 10 d) 25

हल :-) (a)

$\dfrac{110 \times 110 - 53 \times 53}{57 \times 163} = \dfrac{(110)^2 - (53)^2}{57 \times 163}$.

$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ मान रखने पर -

$= \dfrac{(110+53)(110-53)}{57 \times 163} = \dfrac{163 \times 57}{57 \times 163} = 1$

Q8. $1.5 \times 1.5 + 2 \times 1.5 \times 3.5 + 3.5 \times 3.5 = ?$

a) 25 b) 50

c) 20.75 d) 50.25

हल :-) (a) माना

$1.5 = a \quad 3.5 = b$

$\therefore$

$1.5 \times 1.5 + 2 \times 1.5 \times 3.5 + 3.5 \times 3.5 = ?$

$= a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

$= (1.5 + 3.5)^2 = (5)^2 = 25$

Q9. $\dfrac{(2.3)^3 - (0.027)}{(2.3)^2 + 0.69 + 0.09}$ का मान है -

a) 1 b) 2

c) 3 d) इनमें से कोई नहीं।

हल :-) (b) $\dfrac{(2.3)^3 - (0.027)}{(2.3)^2 - 0.69 + 0.09}$

माना $2.3 = a, \quad 0.3 = b \quad \therefore 0.027 = b^3$

$= \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + a \times b + b^2} = \dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$

$= a - b = 2.3 - 0.3 = 2$

किसी भी संख्या (number) को लिखने के लिए हम दाशमिक प्रणाली के दस अंको तथा 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 व 9 का प्रयोग करते है। भिन्न भिन्न प्रकार की संख्याँ के निर्माण मे हम जिन नियमो, विधियों या सम्बन्धो का अध्ययन करते है, वे सभी संख्याँ पद्धति के घटक होते है।

द्वि-अंकीय एवं n – अंकीय संख्याएं :-)

द्वि-अंकीय संख्याँ :-) यदि किसी संख्याँ का ईकाई अंक x तथा दहाई अंक y हो तो यह द्वि-अंकीय संख्या होगी। अब चूंकि ईकाई का अंक 1 का गुणज तथा दहाई का अंक 10 का गुणज होता है। अतः द्वि- अंकीय संख्याँ =

= 10 x दहाई का अंक + 1 x ईकाई का अंक = 10y + x

जैसे :- किसी संख्याँ का ईकाई अंक 5 तथा दहाई अंक 3 है तो 5 व 3 से बनी द्वि द्वि- अंकीय संख्याँ = 10 x 3 + 1 x 5 = 30 + 5 = 35 होगी।

n- अंकीय संख्याएं :-) यदि किसी संख्याँ मे अंको की संख्याँ n = 3, 4, 5, 6, .... आदि है तो वे संख्याएँ क्रमशः तीन अंकीय, चार अंकीय, पाँच अंकीय, छः अंकीय संख्याएं होगी। इन संख्याओ के निर्माण मे भी ईकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार .... इत्यादि स्थानो का महत्त्व होती है। ये स्थान दाईं ओर से बाईं ओर क्रमशः 1, 10, 100, 1000 आदि के क्रम मे अंको के जातीय मान के गुणज होते है।

उदाहरणार्थ :-) तीन अंको की सबसे छोटी संख्या का निर्माण करते समय हम अंक 1 के आगे 2 शून्य रखेंगे। अर्थात 100 लिखेंगे। न कि 001, क्योंकि संख्याँ पद्धति के अनुसार शून्य की सार्थकता किसी पूर्ण संख्या को लिखने के बाद ही होती है। संख्या पद्धति के अन्तर्गत ऐसे अनेक नियम होते है।

द्वि-अंकीय संख्याँ ज्ञात करना :-

i) यदि किसी द्वि-अंकीय संख्या का ईकाई व दहाई अंक क्रमशः $x$ और $y$ हो तो द्वि-अंकीय संख्याँ $= 10y + x$
तथा अंक पलटने पर बनी संख्या $= 10x + y$ होगी।

ii) इस संख्याँ के अंको का योगफल $= y + x$ होगा।
iii) इस संख्याँ के अंको का अन्तर $= y - x$ होगा।
iv) इस संख्याँ के अंको का गुणनफल $= y \times x$ होगा।

उदाहरण :-) दो अंको की संख्या मे छोटा अंक इकाई स्थान पर है अंको का गुणनफल 24 है। तथा दोनो का अन्तर 5 है तब दहाई स्थान वाला अंक है।

a) 5 b) 8
c) 4 d) इनमे से कोई नही

हल (b) माना कि द्विअंकीय संख्या का ईकाई अंक $= x$
तथा दहाई अंक $= y$

$\therefore$ संख्याँ का गुणनफल $= y \times x = 24$ ----(i)
प्रश्नानुसार, ईकाई अंक छोटा है,
अतः $y - x = 5$ ----(ii)
समी (ii) से, $y = x + 5$ समी० (i) मे रखने पर.

$$\Rightarrow (x+5)x = 24$$
$$\Rightarrow x^2 + 5x = 24$$
$$\Rightarrow x^2 + 8x - 3x - 24 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 + 8x) - (3x + 24) = 0$$
$$\Rightarrow (x+8)(x-3) = 0$$
$$\Rightarrow x = 3$$

$x$ का मान समी० (i) मे रखने पर, $y \times 3 = 24$

$$\Rightarrow y = 8$$

अतः संख्याँ का दहाई का अंक 8 होगा।

| | स्थान | दस करोड़ | करोड़ | दस लाख | लाख | दस हजार | हजार | सैकड़ा | दहाई | इकाई |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| संख्याँ | स्थानीय मान के गुणज | x 100000000 | x 10000000 | x 1000000 | x 100000 | x 10000 | x 1000 | x 100 | x 10 | x 1 |
| 3 अंकीय | | | | | | | | 3 | 7 | 5 |
| 4 अंकीय | | | | | | | 3 | 9 | 0 | 8 |
| 5 अंकीय | | | | | | 6 | 8 | 4 | 2 | 3 |

यहाँ तीन अंकीय संख्याँ 375 के अंको के स्थानीय मान इस प्रकार होगें।

| 3 | 7 | 5 |
|---|---|---|

→ 5 × 1 = 5
→ 7 × 10 = 70
→ 3 × 100 = 300

चार अंकीय संख्याँ 3908 के अंको के स्थानीय मान इस प्रकार होगें।

| 3 | 9 | 0 | 8 |
|---|---|---|---|

→ 8 × 1 = 8
→ 0 × 10 = 0
→ 9 × 100 = 900
→ 3 × 1000 = 3000

पाँच अंकीय संख्याँ 68423 के अंको के स्थानीय मान इस प्रकार होगें।

| 6 | 8 | 4 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|

→ 3 × 1 = 3
→ 2 × 10 = 20
→ 4 × 100 = 400
→ 8 × 1000 = 8000
→ 6 × 10000 = 60000

संख्याँ मे अंको का स्थानीय मान ज्ञात करना →
किसी भी संख्याँ के अंको का स्थानीय मान उनके स्थानीक क्रम के अनुसार गुणजो की गुणा करके ज्ञात करते है। (पूर्व मे दी गयी तालिका और उदाहरण देखें)।

उदाहरण 2 :-) संख्याँ 8375329 के प्रत्येक 3 के स्थानीय मानो मे कितना अंतर है।

a) 299970 b) 2,98,700 c) 2,89,970 d) 2,99,700

हल :-) (d) दी गयी संख्याँ मे प्रत्येक 3 का स्थानीय मान इस प्रकार है -

द.ला. ला. द.ह. ह. सै. द. इ.

8 3 7 5 3 2 9

3 सैकड़ा = 3×100 = 300

3 लाख = 3×100000 = 300000

∴ अभीष्ट अन्तर = 300000 − 300 = 299700

आधारभूत संख्याओं के प्रकार :-)

यहा "आधारभूत संख्याओ के प्रकार" से आशय उन संख्याओ से है जिनके विशेष नाम, जैसे प्राकृत, पूर्ण भाज्य आदि उनके गुण- विशेष के कारण रखे गए है।
जिस प्रकार एक परिवार मे पीढ़ी दर पीढ़ी के सदस्यो के भिन्न भिन्न नाम होते है। उसी प्रकार संख्याओ का भी परिवार होता है।

मिश्रित संख्याओं का प्रकार
- वास्तविक संख्याएँ
  - अपरिमेय
  - परिमेय
    - पूर्णांक
      - ऋणात्मक संख्याएँ
      - पूर्ण संख्याएँ
        - प्राकृत संख्याएँ
          - भाज्य / यौगिक संख्याएँ
          - अभाज्य संख्याएँ
    - भिन्न
- काल्पनिक संख्याएँ