



H - TET

PRIMARY TEACHER (PRT)

हरियाणा शिक्षक पात्रता परीक्षा

प्राथमिक स्तर

भाग - 4

गणित



विषय सूची

1. ज्यामिती	1
2. क्षेत्रमिती	18
3. संख्या पद्धति	74
4. सरलीकरण	86
5. एल.सी.एम. और एच.सी.एफ.	94
6. प्रतिशत	103
7. साधारण ब्याज	117
8. चक्रवृद्धि ब्याज	124
9. अनुपात	131
10. कार्य एवं समय	136
11. लाभ, हानि	155
12. सांख्यिकी	176
13. बीजगणित	181

Maths Pedagogy

1. गणित की प्रकृति	195
2. गणित का क्षेत्र	197
3. गणित का महत्व	198
4. गणित में मूल्यांकन	200
5. शिक्षण की समस्याएँ	205
6. गणितीय शिक्षण की नवीन विधियाँ	207
7. गणित शिक्षण हेतु सहायक सामग्री	220
8. निदानात्मक व उपचासत्मक शिक्षण	222

त्रिभुज (TRIANGLES)

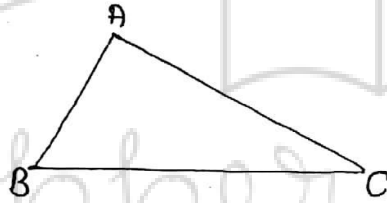
① तीन पन्निच्छेदी रेखाओं द्वारा बनी गई एक त्रिभुज कहलाती है।

त्रिभुजों के प्रकार →

① भुजाओं के आधार पर →

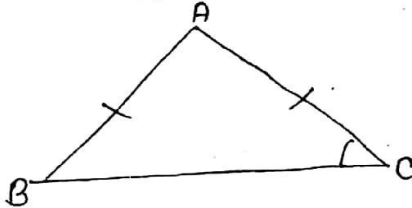
① विषम बाहु त्रिभुज (Scalene Triangle) = यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई असमान हो तो उसे विषम बाहु Δ कहते हैं।

$$AB \neq BC \neq CA$$



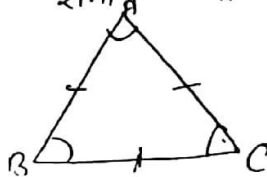
② समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) → यदि किसी त्रिभुज की किसी दो भुजाओं की लंबाई समान हो तो उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

$$AB = AC$$



③ समबाहु त्रिभुज (Equilateral Triangle) - यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाई समान हो तो उसे समबाहु त्रिभुज कहते हैं।
 सभी कोण बराबर होते हैं तथा प्रत्येक कोण 60° का होता है।

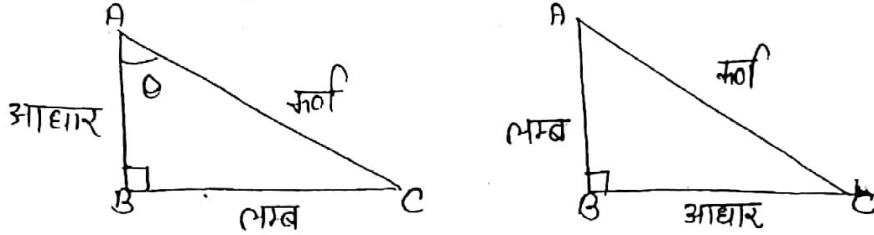
$$AB = BC = CA$$



$$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$$

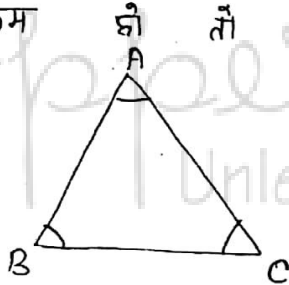
2. कोणी के आधार पर (on the basis of Angles) \rightarrow

(i) समकोणीय त्रिभुज (Right-angled Triangle) \rightarrow यदि किसी त्रिभुज में एक कोण का मान 90° हो तो उसे समकोणीय त्रिभुज कहते हैं।



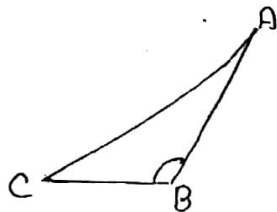
(ii) न्यूनकोणीय त्रिभुज (Acute-angled Triangle) \rightarrow

यदि किसी त्रिभुज में प्रत्येक कोण का मान 0° से ज्यादा तथा 90° से कम हो तो उसे न्यूनकोणीय त्रिभुज कहते हैं।



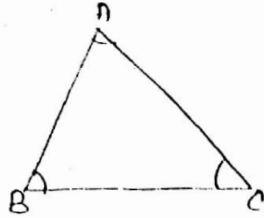
(iii) अधिक कोणीय त्रिभुज (Obtuse-angled triangle) \rightarrow

यदि किसी त्रिभुज में एक कोण 90° से ज्यादा हो तो उसे अधिक कोणीय त्रिभुज कहते हैं।



त्रिभुज का परिमाण (Perimeter of a Triangle) =

किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं की लंबाइयों का योगफल, उस त्रिभुज का परिमाण कहलाता है।

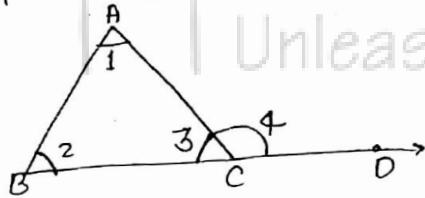


$$2s = a + b + c$$

- प्रमेय - 1 → किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।
- प्रमेय - 2 → (बाह्य कोण प्रमेय) → यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाता है तो इस प्रकार बना बाह्य कोण दो विपरीत अंतः सम्मुख कोणों के योग के बराबर होता है।

$$\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

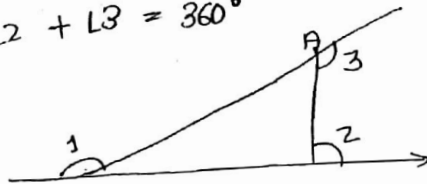


Note → किसी त्रिभुज का एक बाह्य कोण, किसी भी विपरीत अंतः कोण से बड़ा होता है।

i.e. $\angle 4 > \angle 1$ and $\angle 4 > \angle 2$

यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं को बढ़ाया जाता है तो इस प्रकार बने बाह्य कोणों का योग 360° होता है।

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ$$

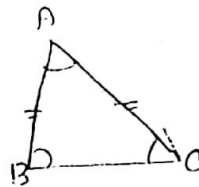


प्रमेय-3 एक समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

दिया $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु \triangle है

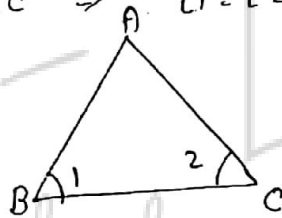
i.e., $AB = AC$

$\angle ABC = \angle BCA$



प्रमेय-4 किसी त्रिभुज की बराबर कोणों के सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

$\angle B = \angle C \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$

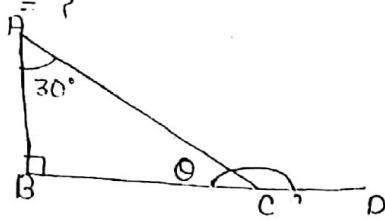


$\therefore AB = AC$

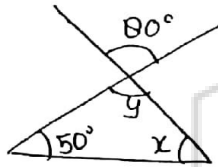
Exercise

- ① दिये गये चित्र में, यदि $\angle ABC = 90^\circ$, तथा $\angle A = 30^\circ$, तो

$\angle ACD = ?$



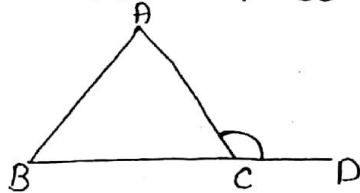
- ②. x तथा y का मान क्या है ?



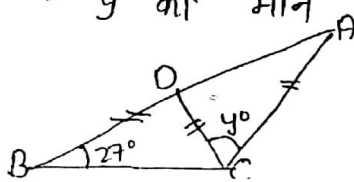
- ③ $\triangle ABC$ में एक रेखा $xy \parallel BC$, AB को x पर तथा AC को y पर प्रतिच्छेद करती है। यदि $\angle xyc$ को द्विभाजित करता है तो $\angle cby : \angle cyb$ कितना होगा ?

- ④. एक त्रिभुज के कोण $1:4:7$ के अनुपात में हैं तो सबसे बड़े कोण का मान ज्ञात कीजिये ?

- ⑤ एक त्रिभुज ABC में, भुजा BC को D तक बढ़ाया गया यदि $\angle ACD = 100^\circ$ तथा $BC = AC$, तो $\angle ABC$ ज्ञात कीजिये ?

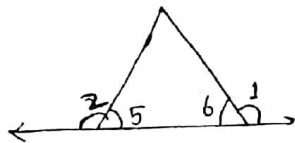


- ⑥ दिये गये निम्नलिखित चित्र, $BD = CD = AC$, $\angle ABC = 27^\circ$ $\angle ACD = y$ तो y का मान ज्ञात कीजिये ?

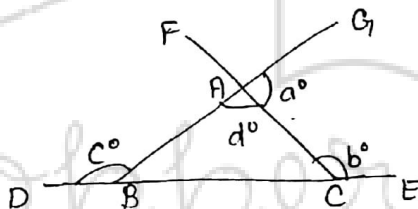


(8) $\triangle ABC$ एक समद्विबाहु त्रिभुज है जहाँ $AB = AC$ भुजा BA को D तक इसके प्रकार बढ़ाया जाता है कि $AB = AD$ तो $\angle BCD$ का मान ज्ञात होगा ?

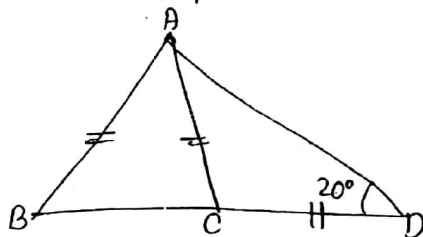
(9) दिये गये चित्र में, त्रिभुज $\triangle ABC$ की भुजा BC को दोनों तरफ बढ़ाया गया है तो $\angle 1 + \angle 2 = ?$



(10) जैसा कि दिया है कि $d^\circ = 70^\circ$ $b^\circ = 120^\circ$ तो ?



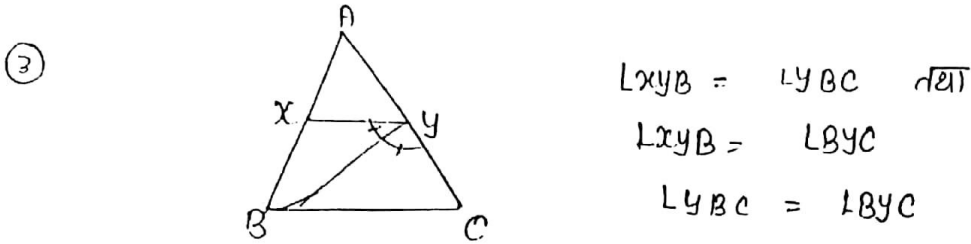
(11) $\triangle ABD$ में, $\angle ADB = 20^\circ$ तथा BD का एक बिन्दु C इस प्रकार है कि $AB = AC$ and $CD = CA$ तो $\angle ABC$ का मान ज्ञात कीजिये ?



10) $\angle ACD = \angle B + \angle A = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ (बाह्य कोण)

2) $y = 80^\circ$ (शीर्ष त्रिभुज में)

$\therefore x = 180^\circ - 50^\circ = 80^\circ = \boxed{50}$



4) $x + 4x + 7x = 180^\circ \Rightarrow x = 15^\circ, 7x = 7 \times 15 = \boxed{105^\circ}$

5) $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$ (बाह्य कोण)

$\angle ACD = 180^\circ - (54^\circ + 54^\circ)$
 $= 180 - 108 = \boxed{72^\circ}$

6) $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$
(बाह्य कोण)

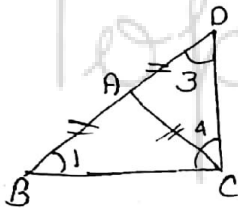
$\Rightarrow 100^\circ = \angle ABC + \angle ABC$

$\because BC = AC$

$2\angle ABC = 100^\circ$

$\angle ABC = \boxed{50^\circ}$

6) 7)



$\angle 1 = \angle 2 \quad \because AB = AC$

तथा $\angle 3 = \angle 4 \quad \because AB = AC = AD$

सब $\angle B + \angle C + \angle D = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 2 + \angle 4 + \angle 4 = 180^\circ$

$\Rightarrow 2(\angle 2 + \angle 4) = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ \Rightarrow \angle C = 90^\circ$

⑧ $L1 = LA + L5$ तथा
 $L2 = LA + L6$ (बाह्यकोण)
 $L1 + L2 = LA + (LA + L5 + L6)$
 $= \boxed{LA + 180^\circ}$

⑨ $a^\circ = 180^\circ - d^\circ = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$

तथा $c^\circ = d^\circ + \angle ACB$
 $= 70^\circ + (180^\circ - b^\circ)$
 $= 70^\circ + 60^\circ = 130^\circ$

$\boxed{\text{ans} = 130^\circ}$

⑩ माना ABC एक त्रिभुज है।

$$LA + LB = LC$$

हम जानते हैं कि - $(LA + LB) + LC = 180^\circ$

$$\Rightarrow LC + LC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2LC = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{LC = 90^\circ}$$

★ [गणित की प्रकृति]

- वास्तव में गणित का शाब्दिक अर्थ होता है - 'वह शास्त्र जिसमें गणनाओं की प्रधानता हो।
- अतः हम कह सकते हैं कि गणित - "अंक, अक्षर, चिन्ह आदि संक्षिप्त संकेतों का वह विज्ञान है जिसकी मदद से परिमाण, दिशा एवं स्थान पर बोध होता है।"

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ -

- ① भारतिल, रच, स्टोन के मतानुसार - "गणित ऐसी अमूर्त व्यवस्था का अध्ययन है जो कि अमूर्त तत्वों से मिलकर बनी हैं। इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया गया है।"
- ② बर्ट्रैंड रसेल के अनुसार - "गणित एक ऐसा विषय है जिसमें हम यह भी नहीं जानते कि हम किसके बारे में बात कर रहे हैं और न ही यह जान पाते हैं कि हम जो कह रहे हैं वह सत्य है।"
- ③ गैलीलियो के अनुसार - "गणित वह भाषा है जिसमें परमेश्वर ने सम्पूर्ण जगत या ब्रह्माण्ड को लिख दिया है।"
- ④ लॉक के अनुसार - "गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या भास्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।"

- 5) हॉगवैन के अनुसार - गणित सभ्यता और संस्कृति का दर्पण है।
- 6) रीजन बैकन के अनुसार - "गणित सभी विज्ञानों का सिंह द्वार एवं कुंजी है।"
- 7) ऑक्सफोर्ड डिक्शनरी - गणित मापन, मात्रा तथा परिमाण का विज्ञान है।
- 8) फ्लैटी के अनुसार - गणित एक ऐसा विषय है जो मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करने का अवसर प्रदान करता है। एक सुषुप्त आत्मा में चेतना एवं ज्वलन जागृति उत्पन्न करने का कोशल गणित ही प्रदान कर सकता है।
- 9) डटन के अनुसार - गणित शिक्षण का वास्तविक उद्देश्य ज्ञान प्राप्त करना नहीं है वरन् क्षमता प्रदान करना है।
- 10) डेविड व्हीसर - अधिक गणित जानने की अपेक्षा यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीयकरण कैसे किया जाय।

गणित की प्रकृति -

गणित की प्रकृति को निम्न बिन्दुओं द्वारा भलीभाँति समझा जा सकता है -

1. गणित में संख्याएँ, स्थान, दिशा एवं मापन अथवा माप लेने का ज्ञान प्राप्त किया जाता है।

- (2.) गणित के ज्ञान का आधार हमारी शानेन्द्रियाँ हैं।
- (3.) गणित के नियम सिद्धान्त, सूत्र सभी स्थानों पर एक समान होते हैं जिससे उनकी सत्यता की जाँच किसी भी समय एवं स्थान पर की जा सकती है।
- (4.) गणित के अध्ययन से आगमन, निगमन एवं सामान्यीकरण की योग्यता विकसित होती है।
- (5.) गणित के ज्ञान से बालकों में प्रशंसात्मक दृष्टिकोण एवं भावना का विकास होता है।
- (6.) इससे बालकों में स्वस्थ एवं वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है।
- (7.) गणित के ज्ञान का उपयोग विज्ञान की विभिन्न शाखाओं तथा भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान एवं अन्य विषयों के अध्ययन में किया जाता है।
- (8.) गणित विज्ञान की विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में भयदगार ही नहीं, बल्कि उनकी प्रगति एवं संशोधन की आधाराशील है।
- (9.) इसके अध्ययन से प्रत्येक ज्ञान एवं सूचना स्पष्ट होती है और उसका एक संभावित उत्तर निश्चित होता है।

गणित का क्षेत्र

→ इसके आधारीक गणित एवं प्रयुक्त गणित दो पक्ष हैं।

(अ) आधारीक गणित - इसकी मुख्य धाराएँ इस तरह हैं।

(i) समुच्चय सिद्धान्त

(ii) बीजगणित

(iii) ज्यामिति

(iv) विश्लेषण

(v) संचय विन्यास विज्ञान एवं संख्या पद्धति

(vi) सांस्थिति विज्ञान

(ब) प्रयुक्त गणित - इसकी निम्न उपबन्धाएँ हैं।

(i) परिकल्पनी विज्ञान

(ii) सांख्यिकी

भौतिक सिद्धान्तों गणितीय पक्ष -

(i) कणों तथा पद्धतियों की यांत्रिकी (ix) अवकलन विधीय

(ii) तरलों की यान्त्रिकी

(iii) ठोस की यांत्रिकी

(iv) सांख्यिकी यांत्रिकी

(v) विद्युतचुंबकीय सिद्धान्त

(vi) सापेक्षिकता सिद्धान्त

(vii) रीमैनिमन ज्यामिति

(viii) क्वांटम यांत्रिकी

गणित का महत्व

— इसकी उपयोगिता जीवन के विभिन्न पक्षों में निम्न तरह हो सकती है—

- (i) विचार व्यक्त करने में महत्व।
 - (ii) दैनिक जीवन में महत्व।
 - (iii) आर्थिक सामाजिक प्रगति में महत्व।
 - (iv) बौद्धिक पुवीणता।
 - (v) तर्क संगत, क्रमबद्ध एवं व्यावहारिक गुणों का विकास।
- गणित को पाठ्यक्रम में विशेष स्थान देने के कारण—

1. यह विज्ञान विषयों का आधार है।
2. गणित का मानव जीवन में घनिष्ठ संबंध है।
3. गणित बच्चों में तार्किक दृष्टिकोण पैदा करता है।
4. गणित एक विशेष तरह से सोचने का दृष्टिकोण प्रदान करता है।
5. गणित एक सघन विज्ञान है।
6. गणित मानसिक शक्ति को विकसित करने का अवसर प्रदान करता है।
7. गणित का ज्ञान चरित्र निर्माण तथा नैतिकता के विकास में मददगार है।
8. गणित की भाषा सार्वभौमिक होती है।
9. गणित का ज्ञान अन्य विषयों के अध्ययन में मददगार होता है।
10. गणित समूह (समुच्चय) एवं संरचनाओं का अध्ययन है।

गणित शिक्षण के मूल्य -

- | | |
|--------------------------|--|
| ① औद्योगिक मूल्य | ⑦ कलात्मक मूल्य |
| ② प्रयोगात्मक मूल्य | ⑧ जीविकीपार्जन सम्बन्धी मूल्य |
| ③ अनुशासन सम्बन्धी मूल्य | ⑨ भौतिक वैज्ञानिक मूल्य |
| ④ नैतिक मूल्य | ⑩ अन्तर्राष्ट्रीय मूल्य |
| ⑤ सामाजिक मूल्य | ⑪ वैज्ञानिक दृष्टिकोण से सम्बन्धित मूल्य |
| ⑥ सांस्कृतिक मूल्य | |

गणित की भाषा

- ⇒ गाणितीय भाषा किसी वस्तु और नाम में अन्तर करती है जैसे - संख्या और संख्यांक, भिन्न और भिन्नात्मक संख्याएँ।
 - ⇒ कुछ साधारण भाषा के शब्दों का प्रयोग परिभाषित पदों के रूप में कई बार भिन्न सन्दर्भ में किया जाता है जैसे - शब्द 'मूल' का प्रयोग समीकरण के मूल और वर्गमूल, घनमूल आदि में होता है।
 - ⇒ संक्षेपण का प्रयोग करते हैं जैसे - ग्राम के लिश-
gram का प्रयोग सही नहीं है।
 - ⇒ किसी एक निश्चय की अनेक प्रकार से नामांकित या व्यक्त कर सकते हैं जैसे कि योग को 'जोड़िए', 'मानना' कीजिए, 'कुल कितने'।
 - ⇒ अन्य भाषाओं की तरह गणित की भाषा का भी अपना व्याकरण है। इसमें भी संज्ञा, क्रिया और विशेषण आदि पाए जाते हैं।
- भाषा के गुण - शुद्धता, अर्थार्थता और सक्षमता।

[गणित में मूल्यांकन]

⇒ मूल्यांकन हमारे सामान्य शब्दकोश का एक सामान्य भाग बन चुका है।

⇒ शाब्दिक विश्लेषण से देखे जाते हैं मूल्यांकन दो शब्दों से मिलकर बना है पहला मूल्य तथा दूसरा अंकन।

⇒ इस तरह मूल्य का अंकन करना ही मूल्यांकन है।

⇒ संक्षेप में मूल्यांकन एक निर्णयात्मक तथा व्यापक प्रक्रिया है जिसके अन्तर्गत विषय वस्तु की उपयोगिता के विषय में निर्णय लिया जाता है।

मूल्यांकन से सम्बन्धित कुछ परिभाषाएँ -

① टारगर्सन एवं शडभ्स के अनुसार, "मूल्यांकन का अर्थ है कि किसी वस्तु अथवा प्रक्रिया का मूल्य निर्दिष्ट करना। इस तरह शैक्षणिक मूल्यांकन से अभिप्राय - शिक्षण प्रक्रिया एवं सीखने की प्रक्रियाओं से पैदा अनुभवों की उपयोगिता के विषय में निर्णय देना।"

② क्रिवलिन एवं हन्ना के अनुसार - "छात्रों के व्यवहार में शिक्षालय द्वारा किये गए परिवर्तनों के विषय में प्रगणों को शक्ति बनाना तथा उनकी व्याख्या करना ही मूल्यांकन है।"

③ रैमर्स तथा गैज के अनुसार, "मूल्यांकन की प्रक्रिया की व्यापकता छात्र के समस्त व्याक्तित्व पर अपने प्रसार का उल्लेख करती है, न कि सिर्फ उसकी बौद्धिक उपलब्धि का।"