Toppersnotes
Unleash the topper in you

SUPER-TET

Uttar Pradesh Basic Education Board

परीक्षा नियामक प्राधिकारी, उ.प्र.

एडेड जूनियर हाई स्कूल

सहायक अध्यापक/प्रधानाध्यापक
(विज्ञान एवं गणित)

पेपर - 2 || भाग - 4

गणित

SIERRA INNOVATIONS

विषय सूची

NUMBER SYSTEM

सम संख्याये (Even numbers) ⇒ जो प्राकृत संख्याये 2 से पूर्णतया विभक्त हो जायें उन्हें सम संख्याये कहते हैं।

जैसे - 32, 46, 54, 98, 90 आदि

विषम संख्याये (odd numbers) ⇒ जो प्राकृत संख्याये 2 से पूर्णतया विभक्त न हो जाये तो उसे विषम संख्याये कहते हैं। जैसे - 23, 25, 27, 29, 31 आदि

अभाज्य संख्याये (Prime numbers) ⇒ ऐसी प्राकृत संख्याये जिसके दो तथा केवल दो गुणनखण्ड हो, अभाज्य संख्याये कहलाती हैं।

जैसे - 100 से कम सभी अभाज्य संख्याये नीचे दी गई हैं।

2, 3, 5, 7, 11, 13, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 43, 45, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 83, 89, 97 इनकी संख्या 25 है।

पूर्ण संख्याये ⇒ (Whole number)

0 से अनन्त तक संख्याओं को पूर्ण संख्या कहते हैं।

{1, 2, 3, 4, 5, 6 ------ }

- सबसे छोटी पूर्ण संख्या = शून्य है।

प्राकृतिक संख्याये ⇒ (Natural number)

$\{1, 2, 3, 4, 5 \text{———} \infty\}$

जातीय मान (Local Value)

किसी दी संख्या में किसी अंक का जातीय मान उसका अपना मान है चाहे वह किसी भी स्थान पर क्यों न हो

जैसे – संख्या 63578 में 3 का जातीय मान 3 है
6 का जातीय मान 6 है।

स्थानीय मान (Place Value)

किसी दी गई संख्या में –
इकाई अंक का स्थानीय मान = (इकाई अंक × 1)
दहाई अंक का स्थानीय मान = (दहाई अंक ×10)
सैकड़े अंक का स्थानीय मान = (सैकड़े का अंक ×100) आदि

उदा० ⇒ संख्या 32567809 में निम्न अंकों का स्थानीय मान ज्ञात कीजिये ?
(i) 3 (ii) 5 (iii) 7 (iv) 8 (v) 0

हल → इन्हें तालिका में लिखने पर =

करोड़	दस लाख	लाख	दस हजार	हजार	सैकड़ा	दहाई	इकाई
3	2	5	6	7	8	0	9

3 का स्थानीय मान = 3×10000000 = 30000000
5 का स्थानीय मान = 5× 100000 = 500000
7 का स्थानीय मान = 7×1000 = 7000
8 का स्थानीय मान = 8×100 = 800
0 का स्थानीय मान = 0×10 = 0

कुछ विशेष सूत्र

(i). $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(ii). $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

(iii) – $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

(iv) – $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

(v) $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

(vi) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(vii) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

(viii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(ix) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

① $6784 \times 786 + 6784 \times 214 = ?$

$= 6784 \times (786 + 214)$

$= 6784 \times 1000 = \boxed{6784000}$

② $8765 \times 974 - 8765 \times 874 = ?$

$= 8765 \times (974 - 874)$

$= 8765 \times 100 = \boxed{876500}$

③ $1509 \times 1509 = ?$

$(1509)^2 = (1500 + 9)^2$

$= (1500)^2 + (9)^2 + 2 \times 1500 \times 9$ $\quad [\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$= 2250000 + 81 + 27000$

$= \boxed{2277081}$

④ $1994 \times 1994 = ?$

$(2000 - 6)^2 =$

$= (2000)^2 + 6^2 - 2 \times 2000 \times 6$ $\quad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab]$

$= 4000000 + 36 - 24000$

$= 4000000 + 36 - 2400 = 4000036 - 24000$

$= \boxed{3976036}$

⑤ $883 \times 883 - 117 \times 117 = ?$

$= (883)^2 - (117)^2$ $\quad [a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)]$

$= (883 + 117)(883 - 117)$

$= 1000 \times 766 = \boxed{766000}$

(6) $\frac{703 \times 703 \times 703 + 217 \times 217 \times 217}{703 \times 703 - 703 \times 217 + 217 \times 217} = ?$

हल – दिया गया व्यंजक $= \frac{(703)^3 + (217)^3}{(703)^2 - 703 \times 217 + (217)^2}$

$= \frac{(a^3+b^3)}{(a^2-ab+b^2)}$, जहाँ $a = 703$ तथा $b = 217$

$= \frac{(a+b)\ (a^2+b^2-ab)}{(a^2-ab+b^2)}$

$\Rightarrow (a+b) = (703+217) = \boxed{1000}$

(7) $\frac{693 \times 693 \times 693 - 303 \times 303 \times 303}{693 \times 693 * 693 \times 303 + 303 \times 303} = ?$

हल – दिया गया व्यंजक $= \frac{(693)^3 - (303)^3}{(693)^2 + (303)^2 + (693 \times 303)}$

$= \frac{a^3-b^3}{a^2+b^2+(ab)}$

$= \frac{(a-b)\ (a^2+b^2+ab)}{(a^2+b^2+ab)}$

$= (a-b)$

$= 693 - 303$

$= \boxed{310}$

⑧ $(476 \times 198 \times 359 \times 242)$ में इकाई का अंग क्या होगा?

हल → दी गई संख्याओ के इकाई अंकों का गुणनफल =

$(6 \times 8 \times 9 \times 2) = 864$

$\boxed{\text{अतः अभीष्ट अंक} = 4}$

⑨. $(3527)^{654}$ में इकाई अंक क्या होगा?

हल → अभीष्ट अंक $(7)^{654}$ मे ईकाई अंक

$= [(7^4)^{163} \times 7^2]$ में ईकाई अंक

$= [1 \times 49]$ में ईकाई अंक $= 49 = 9$

$\therefore$ $\boxed{(3527)^{654} \text{ में ईकाई अंक} = 9.}$

⑩ $(7^{65} \times 6^{41} \times 3^{57})$ में ईकाईअंक क्या है?

7^{65} का ईकाई अंक $= (7^4)^{16} \times 7$ का ईकाई अंक $(1 \times 7) = 7$

6^{41} का ईकाई अंक $= 6$

3^{57} का ईकाई अंक $= (3^4)^{14} \times 3$ का ईकाई अंक $= (1 \times 3) = 3$

अभीष्ट अंक $= (7 \times 6 \times 3)$ का ईकाई अंक $= 126$ का ईकाई अंक $= 6$

① $\left(1\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} + 111\frac{1}{2} + 1111\frac{1}{2}\right) = ?$

$= \left(1 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{1}{2} + 111 + \frac{1}{2} + 1111 + \frac{1}{2}\right)$

$= \left(1 + 11 + 111 + 1111 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$= (1234 + 1 + 1)$

$= \boxed{1236}$ ans

② $\left[\frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{3\times4} + \text{----} + \frac{1}{99\times100}\right] = ?$

$\left[1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{---} + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right]$

$\left[1 - \frac{1}{100}\right]$

ans $\left[\frac{99}{100}\right]$

③ $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{19^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(20)^2}\right) = ?$

$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) -- \left(1 - \frac{1}{19}\right)\left(1 + \frac{1}{19}\right)\left(1 - \frac{1}{20}\right)\left(1 + \frac{1}{20}\right)$

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4}$ ——— $\frac{18}{19} \times \frac{20}{19} \times \frac{19}{20} \times \frac{21}{20}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{21}{20}$

$= \frac{21}{40} = \boxed{0.525}$

संख्या 536407 में निम्न अंकों के जातीय मान लिखये?

(i) 5 (ii) 4 (iii) 0.

5 का जातीय मान = 5

4 का जातीय मान = 4

0 का जातीय मान = 0

विभक्ति के नियम

xxx संख्याओं में भाग संक्रिया xxx (Division on numbers) xxx

माना किसी संख्या a को संख्या b से विभक्त करने पर भागफल q तथा शेषफल r है तब —

a = भाज्य (dividend)
b = भाजक (divisor)
q = भागफल (quotient)
r = शेषफल (remainder)

$$b\overline{)\,a\,}(q$$
$$\underline{r}$$

$$\boxed{\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेषफल}}$$

विभक्त होने के नियम →

2 से – यदि किसी सं० का अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो, तो वह सं० २ से पूर्णतया विभक्त होगी

3 से – यदि दी गई सं० के सभी अंको का योग 3 से पूर्णतया विभक्त हो जाये

4 से – यदि दी गई सं० के अंतिम दो अंक 4 से पूर्णतया विभक्त हो।

5 से – यदि दी गई सं० के ईकाई का अंक 5 अथवा 0 हो।

6 से – यदि दी गई सं० २ और 3 दोनो से पूर्णतया विभक्त हो।

7 से – यदि ईकाई अंक को छोड़कर शेष बची सं० में से ईकाई का दुगुना घटा देने पर बची सं० 7 से विभक्त तो दी गई सं० 7 से विभक्त होगी।

8 से – यदि दी गई सं० के अन्तिम तीन अंक 8 से पूर्णतया विभक्त हो।

9 से – यदि दी गई सं० के सभी अंकों का योग 9 से पूर्णतया विभक्त हो।

10 से – यदि दी गई सं० का अन्तिम अंक शून्य हो।

11 से – कोई भी सं० 11 से विभाजित होगी यदि उसके सम स्थान के अंको का योग का अन्तर या तो 0 हो या 11 से विभाजित हो।

घातांक एवं करणी (INDICES AND SURDS)

संख्या पद्धति :

प्राकृतिक संख्याये (Natural Numbers) ⇒ {1, 2, 3, 4, 5 —— आदि}

प्राकृत संख्याये है, जिनका प्रयोग हम गिनने में करते हैं।

* सभी धनात्मक पूर्णांक संख्याये, प्राकृत संख्याये होती हैं।
* सबसे छोटी प्राकृत संख्या = 1
* सबसे बड़ी प्राकृत संख्या कोई नही है।

* इसका समुच्चय
N = {1, 2, 3 ----}

पूर्ण संख्याये (Whole numbers) ⇒ प्राकृत संख्याओ के समुच्चय मे शून्य (0) को शामिल करने पर पूर्ण संख्याओ का समुच्चय कहते हैं।

जिसे 'W' से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार W = {0, 1, 2, 3 ——}

पूर्ण संख्याओ को अऋणात्मक संख्याये भी कहते हैं।

पूर्णांक (integers) ⇒ सभी प्राकृत संख्याये, शून्य तथा प्राकृत संख्याओ के ऋणात्मक मानो के परिवार को पूर्णांक कहा जाता है।

$$I = \{\ldots\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 ---\}$$

(i) ऋणात्मक पूर्णांक संख्याओ का समुच्चय = {-1, -2, -3 ---}

(ii) अऋणात्मक पूर्णांक संख्याओ का समुच्चय = {0, 1, 2, 3 —}

(iii) धनात्मक पूर्णांक संख्याओ का समुच्चय = {1, 2, 3 ---}

(iv) अधनात्मक पूर्णांक संख्याओ का समुच्चय = {0, -1, -2, -3 --}

* ध्यान रखे शून्य (0) निश्चित रूप से एक अऋणात्मक पूर्णांक संख्या तथा एक अधानात्मक पूर्णांक संख्या दोनो है।

<u>परिमेय संख्याये</u> (Rational numbers) ⇛ ऐसी संख्याये जिन्हे $\frac{p}{q}$, के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहाँ p तथा q पूर्णांक संख्याये है तथा $q \neq 0$ "परिमेय संख्याये कहलाती है" तथा इनके समुच्चय को Q से व्यक्त किया जाता है।

e.g. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{-3}{7}$, 6 (as $6 = \frac{6}{1}$) आदि परिमेय संख्याये है।

- परिमेय संख्याओ का समुच्चय पूर्णांक संख्याओ (Integers) के समुच्चय तथा भिन्नो (Fractions) को सम्मिलत किया गया है।

- <u>परिमेय संख्याओ का दशमलव रूपान्तरण</u> ⇛

परिमेय संख्याओ का दशमलव रूपान्तरण या तो terminating होता है या non terminating होता है।

Eg. $\frac{17}{4} = 4.25$ $\quad \frac{21}{5} = 4.2 \rightarrow$ terminating (or finite) decimal)

$\frac{16}{3} = 5.\bar{3}$ $\quad \frac{2}{3} = 0.\bar{6} \rightarrow$ Non terminating (or Recurring) decimal.

<u>ध्यान रखे</u>– यदि एक परिमेय संख्या का हर (denominator) 2 या 5 के अलावा कोई और अभाज्य गुणनखण्ड (Prime factors) नही रखता है तो इसे केवल और केवल terminating decimal के रूप में व्यक्त किया जाता है।

अपरिमेय संख्याये ⇒ बहुत सी संख्याये ऐसी होती है जिनका दशमलव रूपान्तरण न तो terminating होता है और न ही आवर्त होता है " अपरिमेय संख्या " कहलाती है।

उदाहरण – $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{7}$, π आदि।

याद रखे – π का निश्चित मान (exact value) $\frac{22}{7}$ नही होती है क्योकि $\frac{22}{7}$ एक परिमेय संख्या है जबकि π एक अपरिमेय संख्या है। π का लगभग मान ⇒ $\frac{22}{7} = (3.14)$ भी होता है।

वास्तविक संख्याये (Real numbers) ⇒ परिमेय संख्याये तथा अपरिमेय संख्याये दोनो को मिलाकर वास्तविक संख्याये प्राप्त होती है अर्थात् वास्तविक संख्याये वह है जो परिमेय तथा अपरिमेय है।

वास्तविक संख्याओ को R से सूचित किया जाता है।

इस प्रकार प्रत्येक प्राकृतिक संख्या, प्रत्येक पूर्ण संख्या, प्रत्येक पूर्णांक संख्या, प्रत्येक परिमेय व अपरिमेय संख्या एक वास्तविक संख्या है।

ध्यान रखे →

① एक परिमेय संख्या या एक अपरिमेय संख्या का योग या अन्तर एक अपरिमेय संख्या होती है।

उदा० $(4+\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{5})$, $\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$, $(7+\pi)$ आदि अपरिमेय संख्याये है।

(ii) एक परिमेय तथा अपरिमेय संख्या का गुणनफल भी एक अपरिमेय संख्या होती है।

जैसे – $4\sqrt{3}$, $-2\sqrt{5}$ आदि

सम संख्यायें – विषम संख्यायें ⇒ पूर्णांक संख्यायें (integers)

जो 2 से विभाज्य हो उन्हें सम संख्या तथा जो 2 से विभाज्य न हो उसे विषम संख्या कहते हैं।

इस प्रकार --- −6, −4, −2, 0, 2, 4, 6 आदि सम पूर्णांक हैं।

तथा −5, −3, −1, 1, 3, 5 – – आदि विषम पूर्णांक हैं।

रूढ़ या अभाज्य संख्यायें (Prime numbers) → 1 से बड़ी प्राकृत संख्यायें जो 1 या अपने को छोड़कर किसी दूसरी संख्या से विभाज्य न हो रूढ़ संख्या कहलाती है।

जैसे- 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23 etc

→ 2 केवल एक संख्या है जो रूढ़/अभाज्य संख्या है।

यौगिक संख्यायें (Composite numbers) → 1 से बड़ी प्राकृत संख्यायें जो रूढ़ नहीं है यौगिक कहलाती हैं।

उदा० – 4, 6, 9, 14, 15 आदि

ध्यान रखें – 1 न तो अभाज्य और न ही यौगिक। 1 तथा 100 के बीच कुल 25 रूढ़ संख्यायें हैं।

सरलीकरण के सामान्य नियम ⇒ विभिन्न संक्रियाओं को केवल निम्न क्रमानुसार लेते है।

① रेखाकोष्ठक ② कोष्ठक ③ का ④ भाग $(\div)$ ⑤ गुणा $(\times)$ ⑥ जोड़ $(+)$

⑦ घटा $(-)$

सरलीकरण में पहले छोटा कोष्ठक ( ), फिर मझले कोष्ठक { } तथा अन्त में बड़े कोष्ठक को हल किया जाता है।

इस क्रम के लिये BODMAS याद रखें।

जहाँ B = Bracket
O = of
D = Division
M = Multiplication
A = Addition
S = Subtraction

② मानक मान (Modulus or Absolute Value) ⇒

एक वास्तविक संख्या x का मानक मान, $|x|$ से प्रदर्शित करता है। तथा इसे परिभाषित किया जाता है

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{if } x > 0 \\ -x, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Eg = $|5| = 5 \quad |-5| = -(-5) = 5$

गुणा तथा भाग में, जब दोनो संख्यायें समान चिन्ह रखती है। तो हमें धनात्मक चिन्ह प्राप्त होता है। अथवा ऋणात्मक चिन्ह प्राप्त होता है

ie,

Toppersnotes
Unleash the topper in you

i.e., $(+) \times (+) = +$
$(+) \times (-) = -$
$(-) \times (+) = -$
$(-) \times (-) = +$
$(+) \div (+) = +$
$(+) \div (-) = -$
$(-) \div (+) = -$
$(-) \div (-) = +$

Here $\frac{1}{x}$ is multiplicative inverse of 'x'

घातांक एवं करणी → (Indices and Surds)

माना n एक धनात्मक पूर्णांक है तथा a एक वास्तविक संख्या है

तो − $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{(n \text{ गुणनखण्ड})}$

a^n को a का nवाँ घात कहा जाता है।
जहाँ a को आधार कहा जाता है। तथा n को a के nवें घात का घातांक कहा जाता है।

उदा० = 3^2 = 3 का वर्ग 3^3 = 3 का घन आदि

घातांकों के नियम (Laws of Indices) =

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ जहाँ $a \neq 0$ तथा $(m, n) \in I$

2. $a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$ ---

③ $$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{if } m>n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{if } n>m \\ 1 & \text{if } m=n \end{cases}$$