



UP – TGT

प्रशिक्षित स्नातक शिक्षक

उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा सेवा चयन बोर्ड

गणित

भाग – 1

Index

1.	Simplification	1
2.	Numerical Analysis	11
3.	Linear Programming Problems	42
4.	Duality	56
5.	Profit, Loss, Discount	62
6.	Ratio	84
7.	Simple & Compound Interest	89
8.	Statistics	105
9.	Percentage	110
10.	Time & Work	124
11.	Time, Distance and Train	134
12.	Trigonometry	144
13.	Complex Analysis	155
14.	Vector Space	187
15.	Linear Transformation	200

16.	Matrix Representation of Transformations	205
17.	Differential Calculus	226
18.	2D Formula's Straight Line	235
19.	Parabola	240
20.	3D	243
21.	Cone	245
22.	Cylinder	256

सरलीकरण

कुछ विशेष सूत्र

$$(i) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(ii) \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(iii) \quad (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(iv) \quad (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(v) \quad (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$$

$$(vi) \quad (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(vii) \quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$(viii) \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(ix) \quad a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & 6704 \times 706 + 6704 \times 214 = ? \\
 & = 6704 \times (706 + 214) \\
 & = 6704 \times 1000 = \boxed{6704000}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & 8765 \times 974 - 8765 \times 874 = ? \\
 & = 8765 \times (974 - 874) \\
 & = 8765 \times 100 = \boxed{876500}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad & 1509 \times 1509 = ? \\
 & (1509)^2 = (1500 + 9)^2 \\
 & = (1500)^2 + (9)^2 + 2 \times 1500 \times 9 \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab] \\
 & = 2250000 + 81 + 27000 \\
 & = \boxed{2277081}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad & 1994 \times 1994 = ? \\
 & (2000 - 6)^2 = \\
 & = (2000)^2 + 6^2 - 2 \times 2000 \times 6 \quad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab] \\
 & = 4000000 + 36 - 24000 \\
 & = 4000000 + 36 - 24000 = 4000036 - 24000 \\
 & = \boxed{3976036}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad & 803 \times 803 - 117 \times 117 = ? \\
 & = (803)^2 - (117)^2 \quad [a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)] \\
 & = (803 + 117) (803 - 117) \\
 & = 1000 \times 686 = \boxed{686000}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{703 \times 703 \times 703 + 217 \times 217 \times 217}{703 \times 703 - 703 \times 217 + 217 \times 217} = ?$$

दिया गया व्यंजक = $\frac{(703)^3 + (217)^3}{(703)^2 - 703 \times 217 + (217)^2}$

$$= \frac{(a^3 + b^3)}{(a^2 - ab + b^2)} \quad , \quad \begin{matrix} \text{जहाँ } a = 703 \\ \text{तथा } b = 217 \end{matrix}$$

$$= \frac{(a+b)(a^2 + b^2 - ab)}{(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\Rightarrow (a+b) = (703 + 217) = \boxed{1000}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{693 \times 693 \times 693 - 303 \times 303 \times 303}{693 \times 693 + 693 \times 303 + 303 \times 303} = ?$$

दिया गया व्यंजक = $\frac{(693)^3 - (303)^3}{(693)^2 + (303)^2 + (693 \times 303)}$

$$= \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + (ab)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a^2 + b^2 + ab)}$$

$$= (a-b)$$

$$= 693 - 303$$

$$= \boxed{390}$$

संख्या 536407 में निम्न अंकों के जातीय मान लिखिये?

- (i) 5 (ii) 4 (iii) 0.

5 का जातीय मान = 5

4 का जातीय मान = 4

0 का जातीय मान = 0

विभक्ति 3 - नियम

xxx
xxx
संख्याओं में भाग संक्रिया (Division on numbers)

मान किसी संख्या a को संख्या b से विभक्त करने पर भागफल q तथा शेषफल r हैं तब —

a = भाज्य (dividend)

b = भाजक (divisor)

q = भागफल (quotient)

r = शेषफल (remainder)

$$b \overline{) a \quad } q$$

$$\underline{\quad \quad \quad}$$

$$r$$

$$\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेषफल}$$

विभक्त होने के नियम →

2 से - यदि किसी सं० का अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो, तो वह सं० 2 से पूर्णतया विभक्त होगी

3 से - यदि दी गई सं० के सभी अंकों का योग 3 से पूर्णतया विभक्त हो जाये

4 से - यदि दी गई सं० के अन्तिम दो अंक 4 से पूर्णतया विभक्त हों।

5 से - यदि दी गई सं० के इकाई का अंक 5 अथवा 0 हो।

6 से - यदि दी गई सं० 2 और 3 दोनों से पूर्णतया विभक्त हो।

7 से - यदि किसी अंक को छोड़कर शेष बची सं० में से किसी का दुगुना घटा देने पर बची सं० 7 से विभक्त हो तो दी गई सं० 7 से विभक्त होगी।

8 से - यदि दी गई सं० के अन्तिम तीन अंक 8 से पूर्णतया विभक्त हों।

9 से - यदि दी गई सं० के सभी अंकों का योग 9 से पूर्णतया विभक्त हो।

10 से - यदि दी गई सं० का अन्तिम अंक शून्य हो।

11 से - कोई भी सं० 11 से विभाजित होगी यदि उसके सम स्थान के अंकों का योग का अन्तर या तो 0 हो या 11 से विभाजित हो।

① 1043 को किसी संख्या से भाग देने पर भागफल 11 तथा शेषफल 20 प्राप्त होता है। भाजक ज्ञात कीजिये ?

दिया \Rightarrow

$$\begin{aligned} \text{दिव्यं भाज्य} &= 1043 \\ \text{भागफल} &= 11 \\ \text{शेषफल} &= 20 \end{aligned}$$

$$\text{भाजक} = \frac{(\text{भाज्य}) - (\text{शेषफल})}{\text{भागफल}} = \frac{1043 - 20}{11} = \frac{1023}{11} = \boxed{93}$$

② 1000 में दहरी से दहरी संख्या जोन-सी धराई जाये कि शेष बची संख्या 19 से पूर्णतया विभक्त हो जाये ?

दिया. 1000 को 19 से भाग देने पर शेषफल = 12

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 1000} \quad (52 \\ \underline{95} \\ 50 \\ \underline{38} \\ 12 \end{array}$$

अधिकतम संख्या = 12

③ किसी सं० को 195 से भाग देने पर 47 शेषफल है इस सं० को 15 से भाग देने पर

शेष क्या बचेगा ?

दिया- माना की गई संख्या को भाग देने पर भागफल = 9
तथा शेषफल = 47

$$\begin{aligned} \text{तब की गई संख्या} &= 195 \times 9 + 47 \\ &= 15 \times (139) + 15 \times 3 + 2 \\ &= 15 \times (139 + 3) + 2 \end{aligned}$$

अतः इस सं० को 15 से भाग देने पर
भागफल = 2

⑩ $(6 \times 8 \times 9 \times 2)$ में इकाई का अंग क्या होगा ?

हल → दी गई संख्याओं के इकाई अंकों का गुणनफल =

$$(6 \times 8 \times 9 \times 2) = 864$$

अतः अभीष्ट अंक = 4

⑪ $(3527)^{654}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

हल → अभीष्ट अंक $(7)^{654}$ में इकाई अंक

$$= [(7^4)^{163} \times 7^2] \text{ में इकाई अंक}$$

$$= [1 \times 9] \text{ में इकाई अंक} = 9 = 9$$

∴ $(3527)^{654}$ में इकाई अंक = 9.

⑫ $(765 \times 64 \times 357)$ में इकाई अंक क्या है ?

$$765 \text{ का इकाई अंक} = (7^4)^6 \times 5 \text{ का इकाई अंक} = (1 \times 5) = 5$$

$$64 \text{ का इकाई अंक} = 6$$

$$357 \text{ का इकाई अंक} = (3^4)^1 \times 7 \text{ का इकाई अंक} = (1 \times 7) = 7$$

$$\text{अभीष्ट अंक} = (5 \times 6 \times 7) \text{ का इकाई अंक} = 126 \text{ का इकाई अंक} = 6$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \left(1\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} + 111\frac{1}{2} + 1111\frac{1}{2} \right) = ? \\
 & = \left(1 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{1}{2} + 111 + \frac{1}{2} + 1111 + \frac{1}{2} \right) \\
 & = \left(1 + 11 + 111 + 1111 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
 & = (1234 + 1 + 1) \\
 & = \boxed{1236} \text{ ans}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} \right] = ? \\
 & \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right] \\
 & \left[1 - \frac{1}{100} \right] \\
 & \text{ans } \left[\frac{99}{100} \right]
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{19^2} \right) \left(1 - \frac{1}{20^2} \right) = ?$$

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \left(1 + \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{19^2} \right) \left(1 + \frac{1}{19^2} \right) \left(1 - \frac{1}{20^2} \right) \left(1 + \frac{1}{20^2} \right) \\
 & \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \dots \frac{18}{19} \times \frac{20}{19} \times \frac{19}{20} \times \frac{21}{20} \\
 & = \frac{1}{2} \times \frac{21}{20} \\
 & = \frac{21}{40} = \boxed{0.525}
 \end{aligned}$$

Exercise

① $25 \times 3.25 + 50.4 \div 24 = ?$

ans = 83.35

② $7690 + 2956 - 8050 + 4020 = ?$

ans = 6094

③ $16 \times 12 - 672 \div 21 = x - 211$

ans = 371

④ $32.5 \times 450 + 26.10 \div 3 - 745.5 = ?$

ans = 522

⑤ $(106 \times 106 - 94 \times 94) = ?$

ans = 2400

⑥ $(207 \times 207 + 269 \times 269 - 2 \times 207 \times 269) = ?$

ans = 324

⑦ $(456 \times 456 + 144 \times 144 + 2 \times 456 \times 144) = ?$

ans = 360000

⑧ $\frac{(509 + 107)^2 - (507 - 107)^2}{509 \times 107} = ?$

ans = 4

⑨ $\frac{(931 + 130)^2 + (931 - 130)^2}{(931 \times 931) + (130 \times 130)} = ?$

ans = 2

⑩ $\frac{(735 \times 735 \times 735 - 105 \times 105 \times 105)}{(735 \times 735 + 735 \times 105 + 105 \times 105)} = ?$

$(735 \times 735 + 735 \times 105 + 105 \times 105)$

ans = 1100

Q(11) $(2137)^{753}$ का इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 7

Q(12) $(22)^{23}$ का इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 8

Q(13) $(3694)^{1793} \times (615)^{317} \times (814)^{491}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 0

Q(14) 867943 में 7 के स्थानीय मान तथा पातीय मान में अन्तर =

ans = 6993

Q(15) 689235 में 9 तथा 3 के स्थानीय मानों का अन्तर कितना है =

ans = 8970

Q(16) सबसे छोटी अभाज्य संख्या जौन सी है ?

ans = 2

Q(17) 70 से छोटी अभाज्य संख्याएँ कितनी हैं ?

ans = 18

Sol :-

* Numerical Analysis *

समान अन्तराल के लिए				असमान अन्तराल के लिए			
	x	$f(x)$			x	$f(x)$	
x_0	0	1	$f(x_0)$		0	1	
x_0+h	1	9	$f(x_0+h)$		3	5	
x_0+2h	2	7	$f(x_0+2h)$		5	13	
x_0+3h	3	10	$f(x_0+3h)$		9	16	

Operators \Rightarrow for same diff \Rightarrow

① Δ = अग्रान्तर (forward difference)

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta(f(x+3h)) = f(x+4h) - f(x+3h)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)]$$

$$= \Delta[f(x+h) - f(x)]$$

$$= \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$= f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

$$\Delta^n f(x)$$

$$\text{then } (x+1)^{\text{th}} \text{ term} = (-1)^r {}^n C_r f(x+(n-r)h)$$

Ex: $\Delta^{17} f(x)$ then 13th term = ?

$$\Rightarrow (-1)^{17} {}^{17} C_4 f(x+5h)$$

$$\text{इसमें पदों की सं.} = n+1 = 17+1 = 18$$

$$18^{\text{th}} \text{ term} = (-1) f(x)$$

\Rightarrow जब Δ n time या ज्यादा बार पूछा जाये तो only 1 बार Δ apply करके check किया जाता है यदि

Constant का अन्तर आ रहा है तो जितनी बार Δ लगाया है तो उतनी ही constant की power बढ़ जायेगी।

Ex:- ① $\Delta e^x = e^{x+h} - e^x = e^x (e^h - 1)$

② $\Delta^{15} e^x = e^x (e^h - 1)^{15}$

③ $\Delta^{15} \sin x = ?$ ($h = \pi$)

$$\begin{aligned} \therefore \Delta \sin x &= \sin(x+h) - \sin x \\ &= \sin(x+\pi) - \sin x \quad \checkmark \\ &= -\sin x - \sin x \\ &= (-2) \sin x \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta^{15} \sin x = (-2)^{15} \sin x}$$

★ Fundamental Theorem for difference Calculus \Rightarrow

$f(x)$, n घात का बहुपद है, अंगु गुणांक a_0 है

Then $\boxed{\Delta^n f(x) = a_0 h^n \cdot n!}$

$\therefore \boxed{\Delta^{n+1} f(x) = 0}$

Ex:- ① $\Delta^7 (ax^2-1)(1-bx^3)(cx^2-1)$
 $= abc h^7 \cdot 7!$

② $\Delta^{14} (2x^5-1)(1-3x^6)(4x^2-1)$ ✓

\therefore here x की max. घात = 13 है।
 $(x^5 \cdot x^6 \cdot x^2 = x^{13})$

$= 0$

③ $\Delta^7 x^8 = 0$

\therefore here x की power, Δ की power से बड़ा है। $(\therefore \Delta^7 x^8 = 0)$

② ∇ (nabla) \Rightarrow Backward difference
(पछ्यावर)

$$\nabla f(x+h) = f(x+h) - f(x)$$

$$\nabla f(x+2h) = f(x+2h) - f(x+h) = \Delta f(x+h)$$

③ $E = \text{displacement}$ (पिसरापण) \Rightarrow (एक step आगे जाना)
 $E f(x+h) = f(x+2h)$
 $\therefore E^m f(x) = f(x+mh)$

$E^{-1} f(x+h) = f(x)$ (एक step पीछे आना)

④ $I = \text{Identity operator}$ \Rightarrow

$$I f(x) = f(x)$$

* Relation between operators \Rightarrow

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ &= E f(x) - I f(x) \end{aligned}$$

$$\Delta f(x) = (E - I) f(x)$$

$$\Delta \equiv (E - I)$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x+h) &= f(x+h) - f(x) \\ &= I f(x+h) - E^{-1} f(x+h) \end{aligned}$$

$$\nabla \equiv I - E^{-1}$$

Ex:- $\Delta + \nabla$ निम्न में से किलक speed होगा.

(a) $\nabla \Delta$

(c) $\frac{\Delta \nabla}{2}$

(b) $\Delta - \nabla$

(d) None

$$\Delta + \nabla = E - E^{-1}$$

hint =

~~$$\Delta - \nabla =$$~~

$$\Delta - \nabla = E - I - I + E^{-1}$$

~~$$E - E^{-1} - 2I + E^{-1}$$~~

$$\Delta \nabla = (E - I)(I - E^{-1})$$

$$= E - 2I + E^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta - \nabla = E - 2I + E^{-1}}$$

$$\boxed{\Delta - \nabla = \Delta \nabla}$$

अन्तर सारणी (for Δ & ∇) \Rightarrow

x	f(x)	↓	Δf(x)	↓	Δ ² f(x)	Δ ³ f(x)	Δ ⁴ f(x)
0	f(0) = 1	∇f(1)	4	Δf(1)			
1	f(1) = 5			-2			
2	f(2) = 7	∇f(3)	2	Δf(2)	2		
3	f(3) = 9			2	2	0	
4	f(4) = 13	∇f(4)	4	Δf(4)	2		

Single Missing Term \Rightarrow If table is term missing then use the ques in f(x)

पूछा है।

Ex

x	f(x)
0	1
1	3
2	7
4	11

Then $x=3$
Then f(x) = ?